Утверждаю
Проректор по научной и исследовательской деятельности Южного федерального университета,
доктор химических наук, доцент,
_______________А.В. Метелица
«___» _______________ 2018 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет» о диссертационном исследовании **Коваль Карины Александровны** на тему «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения», представленном к защите в диссертационный совет Д 212.038.22 по защите докторских и кандидатских диссертаций по физико-математическим наукам при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

1. Актуальность темы диссертации

Диссертация Коваль Карины Александровны носит теоретический характер. Она посвящена разработке общего подхода к изучению краевых, спектральных и начально-краевых задач сопряжения в областях с липшицевыми границами. Суть разработанного подхода в том, что решение каждой неоднородной задачи ищется в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте – либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. Решение каждой из вспомогательных задач находится с помощью так называемых обобщённых формул Грина для оператора Лапласа (вернее, для дифференциального выражения $u - \Delta u$).

Задачи сопряжения начали исследовать примерно с середины прошлого века. В частности, этими вопросами занимались Б.З. Каценеленбаум, Н.Н. Войтович, А.Н. Сивов. Одним из первых исследовать краевые и спектральные задачи в липшицевых областях начал М.С. Агранович. Научный руководитель автора, Н.Д. Копачевский, также начал интересоваться этими проблемами и применением полученных общих результатов в гидродинамике. Подходы, которые применялись при исследовании краевых и спектральных задач сопряжения, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Поэтому возник интерес и к развитию теории формул Грина.

Вопросами абстрактной формулы Грина занимались немногие математики. Одни из первых этим вопросом занялись Ж.-П. Обэн, С.Г. Крейн и Р. Шоуволтер. В последние годы эту тему активно развивает научный руководитель автора диссертации, Н.Д. Копачевский, и его ученики.

Таким образом, в диссертации рассмотрены актуальные теоретические проблемы, которые могут найти применение в различных областях математической физики.

2. Степень обоснованности научных положений и выводов

Результаты, полученные в работе, являются в полной мере обоснованными и непротиворечивыми. Для доказательства интегрируемости и получения точных решений использованы методы солитонной математики. Их применение имеет достаточные обоснования. Теоретические результаты оформлены в виде лемм и теорем с логичными и в меру подробными доказательствами.

3. Достоверность результатов и выводов диссертации

Результаты диссертационной работы чётко сформулированы и строго доказаны. При использовании результатов других авторов даны необходимые ссылки. Выполнена проверка полученных решений, поэтому достоверность результатов проведенных исследований не вызывает сомнений. Общий подход к изучению различных задач сопряжения в областях с липшицевыми границами является универсальным и применим к различным конфигурациям пристыкованных областей. Автор диссертации провел достаточно полное математическое исследование упомянутых задач на базе обобщённой формулы Грина для оператора Лапласа, однако эти построения применимы к широкому кругу других проблем математической физики.

4. Научная новизна результатов исследования

Диссертационная работа К.А. Коваль посвящена разработке общей схемы решения смешанных краевых задач сопряжения для разных конфигураций областей с липшицевыми границами. Также эта схема применена для спектральных, начально-краевых задач. Схема заключается в том, что решение неоднородной задачи сопряжения находится в виде суперпозиции достаточно простых вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Выведен и обоснован новый подход к исследованию смешанных краевых, спектральных и начально-краевых задач сопряжения, основанный на использовании абстрактной формулы Грина либо соответствующей обобщённой формулы Грина (в данной работе — для оператора Лапласа). С помощью описанного подхода получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для различных конфигураций пристыкованных областей.

2. На базе этого же подхода исследованы смешанные спектральные задачи сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей с параметрами, входящими в уравнение и краевые условия. Выведены свойства решений полученного операторного пучка в зависимости от того, какой параметр считается спектральным, а какой — фиксированным.

3. На основе этой же общей схемы исследования смешанных краевых задач сопряжения рассмотрены начально-краевые задачи сопряжения

(порождающие спектральные задачи), содержащие производные по времени не только в уравнениях, но и в краевых условиях. Доказаны теоремы о сильной разрешимости каждой из этих задач.

5. Научная значимость результатов

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы К.А. Коваль представляют научный интерес для специалистов, занимающихся изучением смешанных краевых задач сопряжения и могут использоваться в исследованиях, проводимых в Крымском федеральном университете им. В.И. Вернадского, в Южном федеральном университете, Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Воронежском государственном университете, Кабардино-Балкарском государственном университете им. Х.М. Бербекова, Северо-Кавказском федеральном университете, Санкт-Петербургском государственном университете, Российском университете дружбы народов, Южном федеральном университете и других научных организациях.

6. Публикации

Результаты исследований докладывались автором на всероссийских и международных научных конференциях. Все результаты диссертационной работы полностью и своевременно опубликованы в 17 работах, из них 3 статьи – в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

7. Основное содержание работы

Диссертация изложена на 150 страницах, включает в себя 10 рисунков; состоит из содержания, введения, трех глав, разбитых на параграфы (некоторые разбиты на пункты), заключения и списка литературы, включающего 68 наименований.

Первая глава посвящена изучению смешанных краевых задач сопряжения. Это такие задачи математической физики, когда на одной части границы области задают краевое условие Дирихле, на другой – условие Неймана, а на третьей – условие третьего рода, или так называемое условие

Ньютона. Для их решения имеется специальная обобщённая формула Грина для смешанных краевых задач. В ней функционал, связанный с границей области, разбит на части, отвечающие тому или иному краевому условию. В первой главе сформулированы две основные формулы Грина, которые используются в работе. В первой формуле Грина след функции из $H^1(\Omega)$ можно продолжить с липшицевого куска границы на всю границу Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$. Во второй формуле Грина производная по нормали продолжима нулём в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$. На основе этих формул Грина подробно рассматривается общая схема изучения краевых задач на примере краевой задачи сопряжения для конфигурации из трёх областей, которая условно названа «дважды разрезанный банан».

$$u_j - \Delta u_j = f_j(\text{в}\,\Omega_j),\ \ \gamma_{jj}u_j = \varphi_j(\text{на}\,\Gamma_{jj}),\ \ j = \overline{1,3},$$
$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\qquad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21}\ \ (\text{на}\,\Gamma_{21} = \Gamma_{12}),$$
$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\qquad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_2 = \psi_{32}\ \ (\text{на}\,\Gamma_{32} = \Gamma_{23}).$$

Здесь символом $\gamma_{jk}u_k$ обозначен след на поверхности Γ_{jk} функции u_k, заданной в области Ω_k, а символом $\partial_{jk}u_k$ — соответствующая производная по внешней нормали к $\partial\Omega_k$.

Доказано, что решением исходной краевой задачи сопряжения является сумма решений четырёх вспомогательных задач (Зарембы, Стеклова и две вспомогательные задачи С.Г. Крейна). Далее сформулированная схема применяется и к другим конфигурациям пристыкованных липшицевых областей (граница области гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками, «трижды разрезанный арбуз» и др.).

Во второй главе диссертации сформулированный выше подход применён к спектральным задачам сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей. Сначала подробно изучается спектральная проблема для одной области Ω из R^m с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$:

$$u - \Delta u = \lambda u(\text{в}\,\Omega),\ \ \gamma_1 u = 0\ (\text{на}\,\Gamma_1),$$
$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u\ (\text{на}\,\Gamma_2),\qquad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u\ (\text{на}\,\Gamma_3),\qquad \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u\ (\text{на}\,\Gamma_4).$$

В спектральной задаче (2) на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 – условие М.С. Аграновича или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 – условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 – условие типа С.Г. Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. С помощью общего подхода задача разбивается на четыре вспомогательные, содержащие заданную функцию неоднородность лишь в одном месте. Получены одна первая и три вторых вспомогательных задач С.Г. Крейна. С помощью соответствующих формул Грина находятся слабые решения каждой из этих задач и получено уравнение, которому удовлетворяет решение исходной задачи. Итогом исследования является переход к спектральной задаче

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \qquad v \in L_2(\Omega),$$

$$A^{-1} > 0, \qquad B_k = B_k^*, \qquad k > 0, \qquad B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4},$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ. При этом параметры λ и μ в явном виде входят в уравнение. Далее изучены свойства решений. При этом один из параметров считается спектральным, другой — фиксированным. Получены теоремы о структуре спектра и базисности собственных (корневых) элементов для ряда значений фиксированного параметра. Аналогичные спектральные задачи разобраны для двух и трёх примыкающих областей. Рассмотрение показало, что для этих задач возникает такой же пучок вида (3), как в случае с одной областью.

В третьей главе общая схема исследования применена к начально-краевым задачам, которые порождают спектральные. Изучены четыре типа различных задач, в которых производные по времени входят не только в уравнения, но и в краевые условия. Для каждого типа осуществлён переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве, а затем на этой основе доказано существование её сильного (по времени) решения. Разобраны также аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Они приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы аналогичные теоремы о сильной разрешимости.

Заключение

В целом, работа выполнена на высоком математическом уровне. Все представленные в диссертации результаты являются новыми.

Все поставленные в диссертации проблемы исследованы с необходимой полнотой и глубиной. Автор диссертации широко и эффективно использует методы теории абстрактной формула Грина, функционального анализа, спектральной теории операторных пучков, интегро-дифференциальных уравнений. Сформулированный общий подход является достаточно универсальным. Методы доказательств таковы, что аналогичные общие построения можно провести на основе равномерного эллиптического выражения и для соответствующих дифференциальных выражений из теории упругости и гидродинамики.

Отмечая в целом четкость и полноту доказательств, приведённых в диссертации результатов, следует, тем не менее, сделать ряд замечаний.

- На с. 48 диссертации в формуле (1.44) необходимо заменить u_{23}на u_{13}.
- На с. 137 диссертации надо заменить (??)–(??) на (3.101)–(3.106).

Высказанные замечания и пожелания, однако, не снижают общей высокой оценки диссертационной работы Коваль К.А.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Оценивая диссертационную работу в целом, следует, прежде всего, отметить, что работа носит характер законченного математического исследования актуальных проблем математической физики. Полученные в ней результаты составляют несомненный вклад в развитие теории абстрактной формулы Грина, обобщённых формул Грина и их применения для смешанных краевых задач и задач сопряжения.

На основании изложенного считаем, что диссертационная работа Коваль Карины Александровны «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения» соответствует требованиям пункта 9 Положения ВАК РФ о порядке присуждения ученых степеней к кандидатским диссертациям по указанной специальности, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ), профессором Жуковым Михаилом Юрьевичем (344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8-А, Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, тел +7 (863) 2-975-111, e-mail: myuzhukov@gmail.com, myzhukov@sfedu.ru).

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (протокол № 3 от 11 апреля 2018 года).

Заведующий кафедрой вычислительной
математики и математической физики
института математики, механики и
компьютерных наук им. И.И. Воровича
Южного федерального университета,
доктор физико-математических наук, профессор

Михаил Юрьевич Жуков

Сведения об организации:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (ФГАОУ ВО ЮФУ);
Адрес: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42
Телефон: +7 (863) 218-40-00
Электронная почта: info@sfedu.ru
Официальный сайт: http://sfedu.ru

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Личную подпись Жукова М.Ю.
ЗАВЕРЯЮ:
Специалист по работе с персоналом
1 категории Т.Г. Подшивалова М.Ю.
« 12 » апреля 2018 г.

Департамент административно-правового регулирования